Chương 3: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN - QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Bài 1: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ và các khái niệm liên quan:

+ Vectơ là đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu: $\vec{a}$ hoặc $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ có A: điểm đầu, B: điểm cuối.

+ Giá của $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.

+ Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$.

+ Hai vectơ cùng phương khi giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

+ Hai vectơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \end{cases}$.

+ Hai vectơ đối nhau: $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \end{cases}$.

2. Các phép toán về vectơ và các quy tắc:

+ Tổng, hiệu hai vectơ: là một vectơ (được xác định theo quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu hai vectơ).

+ Tích một số với một vectơ: $k.\vec{a}$ là một vec tơ được xác định như sau:

- ✓ Phương: $k.\vec{a}$ luôn cùng phương với $\vec{a}$.
- ✓ Hướng: $\begin{cases} k.\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \ \ khi\ k > 0 \\ k.\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \ \ khi\ k < 0 \end{cases}$.
- ✓ Độ dài: $\left|k.\vec{a}\right| = \left|k\right|.\left|\vec{a}\right|$.

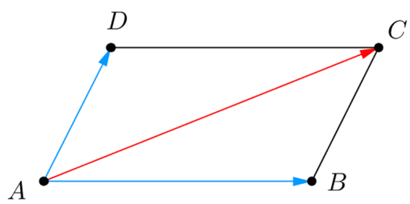
+ Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Đặc biệt: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

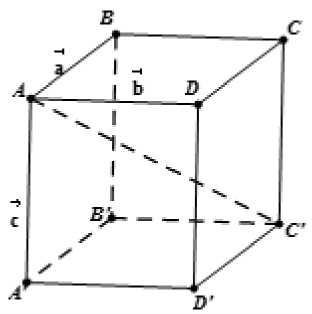
+ **Quy tắc ba điểm**: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

+ **Quy tắc hiệu hai vectơ**: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

+ **Quy tắc hình bình hành**: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



+ **Quy tắc hình hộp**: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

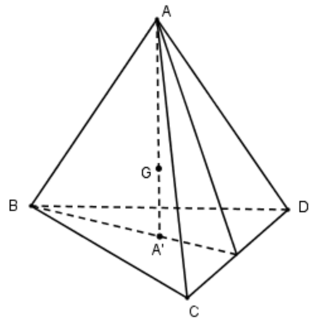


+ **Cần nhớ:**

✓ I là trung điểm AB thì $\begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI},\forall M\end{cases}$.

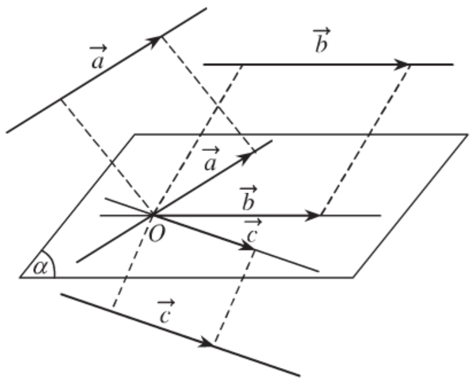
✓ G là trọng tâm tam giác ABC thì $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG},\forall M\end{cases}$.

✓ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG},\forall M\end{cases}$.



3. Ba vectơ đồng phẳng:

+ Định nghĩa: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



+ Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists!(k;l):\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$.

+ Định lí: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng $\Rightarrow \forall\vec{d},\ \exists!(m;n;p):\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'},\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$. Khi đó, $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c})$. **B.** $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c})$. **C.** $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. **D.** $\frac{1}{3}(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'},\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u},\overrightarrow{CA'}=\vec{v},\overrightarrow{BD'}=\vec{x},\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm $B'C'$, K là giao điểm $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC},\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. Gọi G là trọng tâm ΔBCD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC},\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. Gọi M là trung điểm BC. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P là trung điểm AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$. **C.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'},\vec{b}=\overrightarrow{AB},\vec{c}=\overrightarrow{AC},\vec{d}=\overrightarrow{BC}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Chọn khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$. **B.** $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$. **D.** $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm $\Delta AB'C$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{BD'}=4\overrightarrow{BG}$. **B.** $\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$. **C.** $\overrightarrow{AC'}=4\overrightarrow{AG}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AG}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}.$ **B.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}.$ **C.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}.$ **D.** $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}.$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}.$ **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}.$

C. G,S,O không thẳng hàng. **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}.$

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi $G_0=GA\cap(BCD)$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}.$ **C.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}.$

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,CD và G là trung điểm MN. Chọn khẳng định **sai**.

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}.$

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k để $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=1.$ **B.** $k=4.$ **C.** $k=0.$ **D.** $k=2.$

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k để $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$.

A. $k=4.$ **B.** $k=0.$ **C.** $k=1.$ **D.** $k=2.$

Chương 4. GIỚI HẠN

Bài 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

Giới hạn hữu hạn

1. Định nghĩa:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kỳ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(v_n - a) = 0.$

1. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0; \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k} = 0\ \left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0\ (|q|<1); \qquad \lim_{n\to+\infty} C = C$$

2. Định lí:

Giả thuyết		Kết luận
$\lim u_n = a$	$\lim v_n = b$	$\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$
		$\lim(u_n.v_n) = a.b$
		$\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}\ (b\neq 0)$
$u_n \geq 0, \forall n$	$\lim u_n = a$	$\begin{cases} a\geq 0 \\ \lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}\end{cases}$
$\lvert u_n\rvert \leq v_n, \forall n$	$\lim v_n = 0$	$\lim u_n = 0$
$(u_n),(v_n),(w_n)$ $u_n < v_n < w_n, \forall n$	$\lim u_n =$ $\lim w_n = a$	$\lim v_n = a$

** Mọi dãy tăng, bị chặn trên đều có giới hạn. Mọi dãy giảm, bị chặn dưới đều có giới hạn.*

3. Cấp số nhân lùi vô hạn

+ ĐN: *Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q với $|q|\leq 1$.*

+ ***Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn***

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}\left(|q|\leq 1\right)$$

Giới hạn vô cực

1. Định nghĩa:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow |u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bất kỳ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-u_n) = +\infty.$

1. Giới hạn đặc biệt:

$$\lim\sqrt{n} = +\infty \qquad \lim n^k = +\infty\ \left(k\in\mathbb{Z}^+\right)$$

$$\lim q^n = +\infty\ (q>1)$$

2. Định lí:

Giả thuyết		Kết luận
$\lim\lvert u_n\rvert = +\infty$		$\Rightarrow \lim\frac{1}{u_n} = 0$
$\lim u_n = a$	$\lim v_n = \pm\infty$	$\Rightarrow \lim\frac{u_n}{v_n} = 0$
$\lim u_n = a > 0$	$\lim v_n = 0, v_n > 0$	$\Rightarrow \lim\frac{u_n}{v_n} = +\infty$
$\lim u_n = +\infty$	$\lim v_n = a > 0$	$\Rightarrow \lim(u_n v_n) = 0$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

1) $\lim\frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+3}$

2) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}$

3) $\lim\frac{n\sqrt{3n}+3}{n^2+2n+2}$

4) $\lim\frac{(2n+1)(n-1)(3n-4)}{(6n+1)^3}$

5) $\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2-1}\right)$

6) $\lim\frac{\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{2n+7}}{2n+10}$

7) $\lim\frac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$

8) $\lim \dfrac{3^n+4^n}{1+3.4^n}$

9) $\lim \dfrac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$

10) $\lim \dfrac{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

11) $\lim\left[\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{4.6}+\ldots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}\right]$

12) $\lim \dfrac{\sqrt{1+2+3+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+\ldots+n^2}+2n}$

13) $\lim\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$

14) $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+21}\right)$

15) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+1}-n}$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

16) $\lim\left(-2n^3+n+3\right)$

17) $\lim \dfrac{2n^2+n+1}{3n-2}$

18) $\lim\left(-\dfrac{3n^3+4n+1}{2n+5}\right)$

Bài 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Giới hạn hữu hạn, giới hạn vô cực

Giới hạn hữu hạn

1. Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0\,;\quad \lim\limits_{x\to x_0} C = C\ (C:\text{ hằng số})$

2. Định lí:

Giả thuyết		Kết luận
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L+M$
		$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
		$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}\left(M\neq 0\right)$
$f(x)\geq 0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\begin{cases}L\geq 0\\ \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}\end{cases}$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$		$\lim\limits_{x\to x_0}\left\lvert f(x)\right\rvert=\lvert L\rvert$

3. Giới hạn một bên:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực

1. Giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty\,;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c\,;\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\,;\qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$

2. Định lí:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L<0$		+	$-\infty$
		−	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L>0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Cách khử các dạng vô định

Các dạng vô định	Cách khử
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$	Chia tử và mẫu cho x^n với n là bậc cao nhất

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$	Chia tử và mẫu cho $x-a$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[P(x)\pm Q(x)\right]$ có dạng vô định $\infty-\infty$	Nhân chia lượng liên hợp $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$ $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ hoặc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ có dạng $0.\infty$	Đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ hoặc $\dfrac{0}{0}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}$

20) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}}$

21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

23) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3+4x-2}{x^2-3x+4}$

25) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}-5x+3}{2x+\sqrt[3]{27x^3+2}}$

27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$

28) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

29) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

30) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^3+5x^2-5x-3}{x^3-9x}$

31) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$

32) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$

33) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$

34) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2}$

35) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}$

36) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{4x}$

37) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$

38) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+6}-2}$

39) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2-2x}-\sqrt[3]{3-5x}}{x+1}$

40) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

41) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau:

42) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$

43) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$

44) $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

45) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{3+2x}{x+2}$

46) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$

47) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^2+1)(2-x)}}$

Bài 6. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & khi\ x>2\\ 2x+1 & khi\ x\le 2\end{cases}$. Tính giới hạn bên trái, giới hạn bên phải và giới hạn nếu có của hàm số tại điểm $x=2$.

Bài 8. Tìm giới hạn của các hàm số tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x-3} & khi\ x<3\\ 1-x & khi\ x\ge 3\end{cases}$ $tại\ x=3$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1\\ -\dfrac{x}{2} & khi\ x\le 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & khi\ -3\le x<3\\ 1 & khi\ x=3\\ \sqrt{x^2-9} & khi\ x>3\end{cases}$ $tại\ x=1$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & khi\ x>0\\ \dfrac{3}{2} & khi\ x\le 0\end{cases}$ $tại\ x=0$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{|x|} & khi\ x<0\\ 10x^2-\dfrac{1}{4} & khi\ x\ge 0\end{cases}$ $tại\ x=0$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2+8}-x-2}{x^2-4} & khi\ x<2\\ \dfrac{x+3}{x+x} & khi\ x\ge 2\end{cases}$ $tại\ x=2$

Bài 9. Tìm giá trị của m để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & khi\ x<1\\ mx+2 & khi\ x\ge 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\ x>1\\ m^2x^2-3mx+3 & khi\ x\le 1\end{cases}$ $tại\ x=1$

c) $f(x)=\begin{cases}x+3m & khi\ x<-1\\ x^2+x+m+3 & khi\ x\ge -1\end{cases}$ $tại\ x=-1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

GIỚI HẠN DÃY SỐ

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-3n+2}$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n+2n\sqrt{n}}{n^2-1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 4. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{1}{2n+5}$. Khi đó, $\lim\frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n=\frac{1}{n^2+2}$. Khi đó, $\lim(u_n+v_n)$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** **D.**

Câu 7. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2 khi

A. $a=2$. **B.** $a=10$. **C.** $a=8$. **D.** $a=1$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn thì

A. không tồn tại b. **B.** $b=2$. **C.** $b=5$. **D.** b là số thực tùy ý.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0$

A. $a<0;a>1$. **B.** $0\le a<1$. **C.** $a\le 0;a\ge 1$. **D.** $0<a<1$.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(3n^2-1)(n^4-7)}$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{7}$.

Câu 12. Tính giới hạn $L=\lim\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 13. Kết quả của giới hạn $L=\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+3n+1}$

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** 0.

Câu 14. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{3n+2n^3}{n^3+3n-1}$. **B.** $\lim\frac{2n^2}{-n^3+3n}$. **C.** $\lim\frac{n-2n^3}{5n^2-n-1}$. **D.** $\lim\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{3n}-1}$.

Câu 15. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n=\frac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2+n^3+7}{3n^2+2}$. **C.** $u_n=\frac{3n+4}{-9n^2+1}$. **D.** $u_n=\frac{3n+n^2+4}{-3n^2-1}$.

Câu 16. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $u_n=\frac{1+n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2}{5n+5n^3}$. **C.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a\in(-10;10)$ để $\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=-\infty$.

A. 19. **B.** 16. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 18. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Chọn khẳng định đúng.

A. Không tồn tại $\lim u_n$. **B.** $\lim u_n=-\infty$. **C.** $\lim u_n=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Câu 19. Giá trị của $\lim\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 20. Giá trị của $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 21. Giá trị của $\lim\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{3n^2+4}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 22. Giá trị của $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 23. Giá trị của $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 24. Giá trị của $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{11}{8}$. **D.** 1.

Câu 25. Cho dãy số có giới hạn hữu hạn (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, n \ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n = 1$. **C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = -1$.

Câu 26. Cho dãy số có giới hạn hữu hạn (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_n = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \ge 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = +\infty$. **B.** $\lim u_n = 2$. **C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = 1$.

Câu 27. Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 28. Giới hạn $\lim \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 29. Biết $\lim \frac{n + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2 - n - 2}} = a\sin\frac{\pi}{4} + b$. Tính giá trị $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 8$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 1$.

Câu 30. Giới hạn $\lim (n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4 + n^2 - 1}}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

Câu 31. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 7x + 11)$ bằng

A. 37. **B.** 40. **C.** 39. **D.** 38.

Câu 32. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 33. Giới hạn $\lim\limits_{x \to -1} \frac{|x-1|}{x^4 + x - 3}$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 34. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 35. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** Không xác định.

Câu 36. Giới hạn $\lim\limits_{x\to(-3)^{+}} \dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}}, & x<1\\ \sqrt{3x^2+1}, & x\ge 1\end{cases}$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & x\ge 2\\ x-1, & x<2\end{cases}$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3, & x\ge 2\\ ax-1, & x<2\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, & x>3\\ 1, & x=3\\ 3-2x^2, & x<3\end{cases}$. Chọn khẳng định **sai**.

A. $\lim\limits_{x\to 3^{+}} f(x)=6$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^{-}} f(x)=-15$. **D.** Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Câu 41. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\sqrt[3]{3}-1$. **C.** $\sqrt[3]{3}+1$. **D.** $-\infty$.

Câu 42. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 43. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** Không tồn tại.

Câu 44. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{5}$.

Câu 45. Biết $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$ với $a,b\in Z$. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=5$. **B.** $S=25$. **C.** $S=13$. **D.** $S=10$.

Câu 46. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 47. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 48. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ bằng

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $-\dfrac{13}{12}$. **D.** $\dfrac{13}{12}$.

Câu 49. Biết $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Chọn khẳng định **sai**.

A. $1<a<3$. **B.** $b>1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b<0$.

Câu 50. Giới hạn bằng

A. $+\infty$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 51. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 52. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** -2.

Câu 53. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$ với a là tham số thực. Tính giá trị của $P=a^2-2a+4$.

A. $P_{\min}=5$. **B.** $P_{\min}=1$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=3$.

Câu 54. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** $+\infty$.

Câu 55. Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $-\infty$.

Câu 56. Biết $L=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ với a,b là các tham số. Chọn khẳng định đúng.

A. $b>0$. **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}$. **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$. **D.** $a\ge 0$.

Câu 57. Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=+\infty$.

A. $a>2$. **B.** $a>\sqrt{2}$. **C.** $a<\sqrt{2}$. **D.** $a<2$.

Câu 59. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 60. Biết $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.